ELEMENTS DE STATIQUE DES FLUIDES DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

I –L'ETAT FLUIDE

1.1 Généralités

On a déjà vu que **l'état fluide** regroupe **l'état liquide** et **l'état gazeux.** Un fluide est un milieu qui se déforment et s'écoule sous l'action de faibles pressions. Il s'agit d'un état désordonné.

Liquide $\to$ fluide dense et presque incompressible

Gaz $\to$ fluide peu dense et compressible

Un fluide est décrit par des **variables d'état intensives** P, T, ρ etc…définies localement (sur un volume mésoscopique) et qui varient de façon continue à l'échelle macroscopique, on dit que le fluide est un **milieu continu**. Ainsi chaque variable d'état intensive est une fonction de x, y, z ; $\rho = \rho(x,y,z)$, $P(x,y,z)$, $T(x,y,z)$ etc…

Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs numériques de grandeurs caractéristiques de l'état fluide.

Fluide	Etat	Masse molaire M (kg.mol^{-1})	Masse volumique ρ (kg.m^{-3})	Densité de particule n (m^{-3})
Air	Gaz	29×10^{-3}	1,3	$2,7\times10^{25}$
Eau	Gaz	18×10^{-3}	0,80	$2,7\times10^{25}$
Eau	liquide	18×10^{-3}	$1,0\times10^{-3}$	$3,3\times10^{28}$

Il faut retenir qu'un gaz est de l'ordre de **mille fois moins dense** qu'un liquide.

1.2 Compressibilité

On peut caractériser un fluide par son **coefficient de compressibilité isotherme** défini par :

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \text{ coefficient de compressibilité isotherme}$$

Ce coefficient mesure l'aptitude d'un fluide à diminuer de volume quand la pression augmente (en maintenant la température constante).

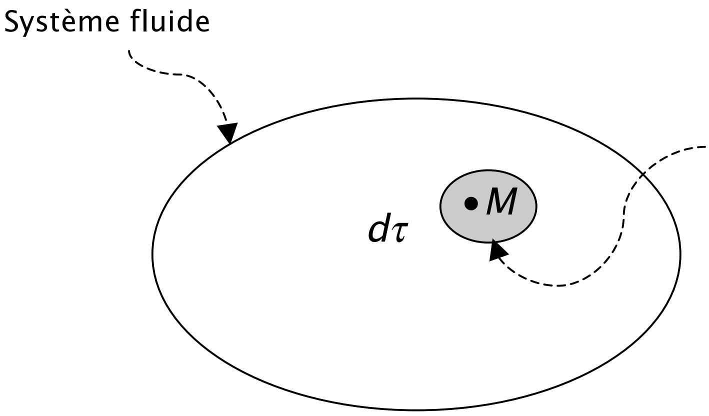
Par exemple, dans le cas du modèle du gaz parfait, on a $PV = nRT$ donc $\chi_T = \dfrac{1}{P}$. Ainsi quand la pression augmente, le volume du gaz a de plus en plus de mal à diminuer car χ_T diminue.

Pour l'air, $\chi_T \approx 10^{-5}$ Pa^{-1}. Dans le cas d'une phase condensée, $\chi_T \approx 0$ Pa^{-1}. En effet, on a beau augmenter la pression, le volume d'une phase condensée ne change presque pas. Pour l'eau, $\chi_T \approx 10^{-10}$ Pa^{-1}.

II – FORCES QUE SUBIT UN FLUIDE

2.1 Hypothèses du modèle d'étude

→ L'entité élémentaire dans l'étude des fluides est ce qu'on nomme une **particule fluide**. Il s'agit de l'analogue du point matériel en mécanique.

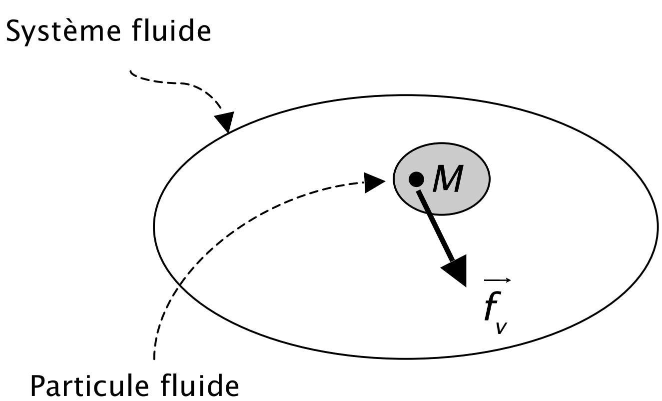


Particule fluide = petit volume à l'échelle macroscopique $d\tau$ autour du point M mais grand à l'échelle microscopique pour contenir un grand nombre de molécules (échelle mésoscopique).

→ A l'échelle macroscopique, le fluide est continu. On ignore la structure atomique de la matière. Toutes les grandeurs macroscopiques varient de façon continue dans l'espace $\rho(M)$, $P(M)$, $T(M)$ etc… Une particule fluide de volume $d\tau$ et de masse dm est assimilable à un point matériel.

→ Le fluide est **globalement au repos**, c'est pourquoi on parle de **statique des fluides**.

2.2 Forces volumiques = actions à distance



La particule de fluide va subir une « petite » force $\overrightarrow{dF_v}$ qui va être proportionnelle au volume $d\tau$ de cette particule de fluide. On peut donc écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{dF_v}(M) = \overrightarrow{f_v}(M)d\tau}$$

$\overrightarrow{f_v}(M)$ est la **densité volumique de force au point *M***, c'est-à-dire la force par unité de volume qui s'exprime donc en N.m^{-3}. La force totale qui s'exerce sur l'ensemble du système fluide de volume V s'écrit : $\overrightarrow{F_v} = \iiint_V \overrightarrow{f_v}(M)d\tau$.

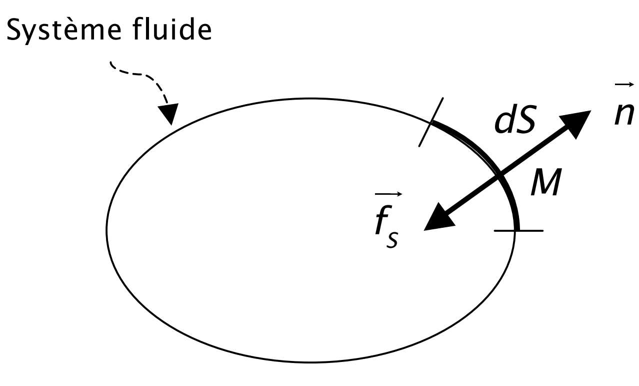
Dans notre étude, la force volumique qui va nous intéresser est la force de pesanteur.

La particule de fluide de volume $d\tau$ et de masse dm va subir la force $\overrightarrow{dF_v} = dm\vec{g}$ avec $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur. Par identification $\overrightarrow{dF_v} = dm\vec{g} = \overrightarrow{f_v}(M)d\tau$, la densité de force volumique s'écrit $\overrightarrow{f_v}(M) = \frac{dm}{d\tau}\vec{g}$. Si on introduit la masse volumique $\rho = \frac{dm}{d\tau}$, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{f_v}(M) = \rho\vec{g}}$$

Il faut noter que dans le cas le plus général, $\rho = \rho(M)$. Dans la pratique, ce sera la seule densité de force volumique que l'on va rencontrer en PTSI.

2.3 Forces surfaciques = actions de contact



Le système fluide va subir au niveau d'un petit élément de surface dS de sa frontière une « petite » force $\overrightarrow{dF_S}$ qui va être proportionnelle à la surface. On peut donc écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{dF_S}(M) = \overrightarrow{f_S}(M)dS}$$

$\overrightarrow{f_S}(M)$ est la **densité de force surfacique au point *M***, c'est-à-dire la force par unité de surface qui s'exprime donc en $\text{N.m}^{-2} = 1 \text{ Pa}$. La force totale de contact qui s'exerce sur l'ensemble de la frontière du système fluide s'écrit : $\overrightarrow{F_S} = \iint_S \overrightarrow{f_S}(M)dS$.

> Pour un fluide au repos, $\overrightarrow{f_S}(M)$ est toujours normale à l'élément de surface dS pour tout point *M*.

Ce résultat n'est pas vrai en général, pour un fluide en mouvement, $\overrightarrow{f_S}(M)$ possède une composante tangentielle à cause de la viscosité du fluide (c'est-à-dire les frottements des couches de fluide les unes sur les autres).

Dans notre étude, la force surfacique qui va nous intéresser correspond à la pression dans un fluide.

$$\overrightarrow{dF}_{\text{fluide}\to\text{paroi}} = P(M)\,\overrightarrow{dS} = P(M)\,dS\,\vec{n}$$
$$\overrightarrow{dF}_{\text{paroi}\to\text{fluide}} = -P(M)\,\overrightarrow{dS}$$

Dans le cas général, la paroi appartient au milieu extérieur. $P(M)$ est la pression qu'exerce le fluide sur la paroi. D'après le principe de l'action et de la réaction (3ème loi de Newton), $\overrightarrow{dF}_{\text{fluide}\to\text{paroi}} = -\overrightarrow{dF}_{\text{paroi}\to\text{fluide}}$. La pression a deux origines physiques et on peut écrire $P = P_c + P_m$.

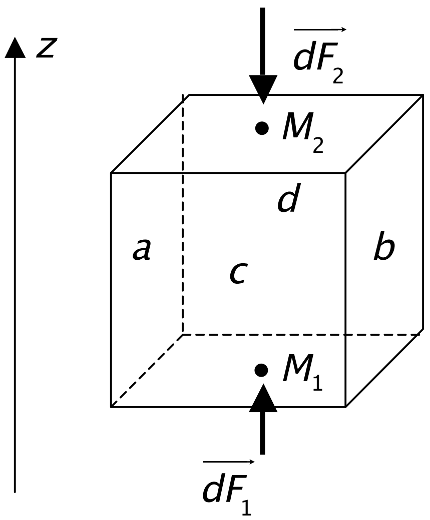
$P_c > 0$ correspond au choc des molécules du fluide sur les parois (on parle de transfert de quantité de mouvement, voir cours sur les gaz parfaits). On parle de pression cinétique.

Ce terme est en général amoindri par le deuxième, $P_m < 0$ qui correspond à l'interaction attractive entre les particules de part et d'autre de la surface. Ce terme a donc pour effet de diminuer la pression totale au niveau de la paroi. Pour un gaz parfait, ce terme est nul car dans un gaz parfait, il n'y a pas d'interaction entre les molécules de ce gaz (voir cours sur le gaz parfait).

III – EQUIVALENT « VOLUMIQUE » DES FORCES DE PRESSION

Notre objectif est de calculer la résultante des forces de surface exercées sur une particule fluide.

Nous allons considérer une particule fluide de forme cubique de volume $d\tau = dx\,dy\,dz$ mais le résultat que nous allons obtenir est très général; peu importe la « forme » de la particule fluide car on travaille sur des volumes infinitésimaux.



On va considérer que $P(z)$ ne dépend que de la hauteur z (c'est le cas de la pression dans la mer) et ne dépend donc pas de x et de y conformément au programme.

Ainsi les pressions exercées sur les parois *a* et *b* d'une part et sur les parois *c* et *d* d'autre part, se compensent.

En M_1, hauteur z, la face 1 est soumise à $\overrightarrow{dF_1} = P(z)dxdy\overrightarrow{u_z}$.

En M_2, hauteur $z+dz$, la face 2 est soumise à $\overrightarrow{dF_2} = -P(z+dz)dxdy\overrightarrow{u_z}$.

La résultante des forces est donc $\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2} = \left(-P(z+dz)+P(z)\right)dx\,dy\,\overrightarrow{u_z} = -\dfrac{dP}{dz}dz\,dx\,dy\,\overrightarrow{u_z}$ car par définition de la dérivée $-P(z+dz)+P(z) = -\dfrac{dP}{dz}dz$. Finalement $\overrightarrow{dF} = -\dfrac{dP}{dz}d\tau\,\overrightarrow{u_z}$. Cette force est identique à celle que subirait le volume $d\tau$ s'il était soumis à une force volumique $\vec{f_v} = -\frac{dP}{dz}\vec{u_z}$. On retiendra :

$$\boxed{\overrightarrow{dF} = -\frac{dP}{dz}d\tau\,\overrightarrow{u_z} \Rightarrow \vec{f_v} = -\frac{dP}{dz}\overrightarrow{u_z}}$$

Dans le cas général où la pression dépend de *x*, *y* et *z*, on peut montrer que :

$$\vec{f_v} = -\left[\frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right] = -\overrightarrow{grad}P$$

où $\overrightarrow{grad}$ (prononcer gradient) est un opérateur mathématique que l'on peut assimiler (ne pas le dire au professeur de mathématiques ☺) à un vecteur qui a pour coordonnées dans une base cartésienne $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. On aura l'occasion de reparler du gradient dans le cours d'électrostatique.

IV – EQUATION FONDAMENTALE DE LA STATIQUE DES FLUIDES

Question : A quelle(s) condition(s) un fluide est-il à l'équilibre dans le champ de pesanteur ?
Il faut, quel que soit le volume de fluide considéré, que la résultante des actions (forces) sur ce volume soit nulle. Ces actions sont :
→ Les forces de pression.
→ Le poids du volume du fluide étudié.
La condition citée ci-dessus doit être vraie pour tout volume infinitésimal $d\tau$ autour d'un point *M.*
On va appliquer le principe fondamental de la dynamique à une particule fluide (dans tout ce chapitre, nous travaillons dans un référentiel galiléen, il n'y a pas de forces d'inertie). Ainsi, comme la particule fluide est au repos: $\vec{0} = \overrightarrow{dF}_{poids} + \overrightarrow{dF}_{pression} = -\rho g d\tau\overrightarrow{u_z} - \frac{dP}{dz}d\tau\,\overrightarrow{u_z}$. On obtient en projetant sur l'axe (*Oz*) orienté **vers la verticale montante** :

$$\boxed{\text{Loi de la statique des fluides: } \frac{dP}{dz} = -\rho g}$$

Si vous décidez de choisir un axe *(Oz)* vers la verticale descendante, il faut remplacer $-\rho g$ par ρg. La convention généralement adoptée est celle de la verticale montante.
Notre objectif est de déterminer le champ de pression $P(z)$ en intégrant la loi de la statique des fluides. Mais, pour aller plus loin, il faut connaître la variation de la masse volumique ρ avec les grandeurs physiques du problème (*P, T, x, y, z…*). Ceci fait l'objet des paragraphes suivants.

V – APPLICATION AU CAS D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE ET HOMOGENE

5-1) Définitions

a) Incompressible

Dans le cas général, la masse volumique dépend de la pression et de la température, $\rho = \rho(P,T) = \dfrac{dm}{d\tau}$.

fluide incompressible $\Leftrightarrow$ ρ indépendant de P $\Leftrightarrow$ $\chi_T = 0$

b) Homogène

Un fluide est homogène si ρ est indépendant du point M de l'espace considéré.

Cela suppose que la température est homogène. Finalement :

Un fluide i**ncompressible** et **homogène** $\Leftrightarrow$ si $\rho = \text{constante}$

5-2) Expression particulière du principe fondamental de la statique des fluides pour un fluide incompressible et homogène

Comme la masse volumique est constante, il est à présent facile d'intégrer $\dfrac{dP}{dz} = -\rho g$. On obtient $P = -\rho g z + \text{constante}$. Il faut prendre z ascendant. On retiendra :

Fluide incompressible et homogène: $P + \rho g z = \text{constante}$

Dans les applications qui vont découler de la relation précédente ; on va utiliser les conditions suivantes :

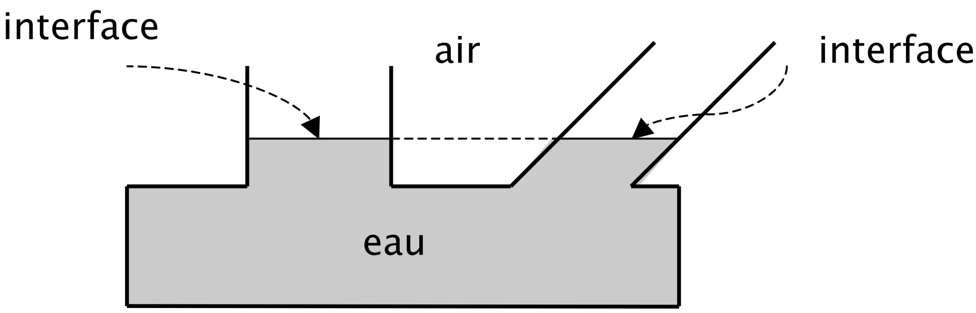
$\rightarrow$ La pression atmosphérique est uniforme au niveau du sol $P = P_0 = 1 \text{ atm} = 1{,}013 \text{ bar}$.

$\rightarrow$ La « **surface libre** » est par définition la surface de contact de l'atmosphère avec le fluide étudié, souvent de l'eau. En tout point M de cette surface libre, on aura égalité de la pression dans le fluide $P(M)$ et de la pression atmosphérique P_0 par continuité de la pression. On parle de **conditions aux limites**.

5-3) Principe des vases communicants

La surface libre est définie par $P(M) = P_0$. La condition d'équilibre $P\left(M\right) + \rho g z = \text{constante}$ impose $P_0 + \rho g z = \text{constante}$ soit $z = \text{constante}$.

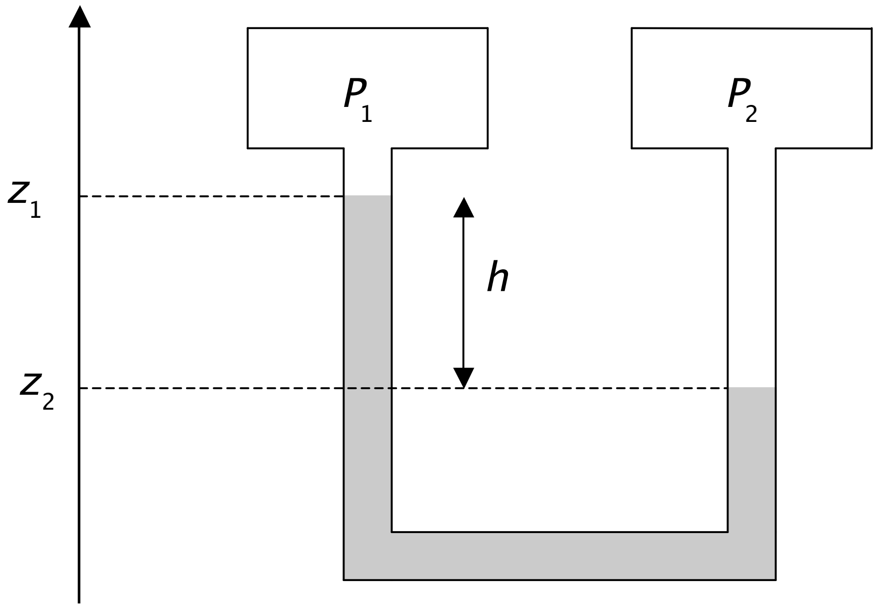
La surface libre d'un fluide est contenue dans un plan horizontal.



Cet effet est connu depuis très longtemps et est mis en œuvre dans les écluses des canaux (Canal du Midi 1666-1681)

5-4) Variation de pressions avec l'altitude

On considère le schéma de principe ci-dessous d'un baromètre différentiel.



On utilise toujours la relation $P+\rho gz = \text{constante}$ ce qui donne $P_1+\rho gz_1 = P_2+\rho gz_2$ que l'on peut réécrire $\Delta P = P_2 - P_1 = \rho g\left(z_2 - z_1\right) = \rho gh$. La mesure de la dénivellation permet d'accéder à la différence des pressions, c'est le principe du baromètre. Si l'on souhaite mesurer la pression atmosphérique, il suffit de laisser l'un des deux compartiments ouvert sur l'atmosphère. Effectuons des applications numériques pour regarder les ordres de grandeur :

• Le liquide est de l'eau :

$\rho_{eau}\left(25°C\right) \approx 10^3\ \text{kg.m}^{-3}$, $g \approx 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$. Si l'on souhaite mesurer au maximum des différences de pression $\Delta P = 1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa}$, il faut un dénivelé en eau de $\left(z_2 - z_1\right) = h = 10{,}2\ \text{m}$. Un baromètre à eau est encombrant.

• <u>Le liquide est du mercure</u>

$\rho_{Hg}\left(25°C\right) \approx 1{,}36 \times 10^4 \text{ kg.m}^{-3} \gg \rho_{eau}$, $g \approx 9{,}8 \text{ m.s}^{-2}$. Si l'on souhaite mesurer au maximum des différences de pression $\Delta P = 1 \text{ atm} = 1{,}013 \text{ bar}$, il faut un dénivelé en mercure de $\left(z_2 - z_1\right) = h = 760 \text{ mm}$. C'est de là que vient l'unité de mesure le mm de Hg pour les pressions. Le mercure étant plus dense, il est plus efficace pour réaliser un baromètre. Il présente cependant des dangers inhérents à l'absorbation accidentelle des métaux lourds.

5-5) Théorème de Pascal

Soit un **fluide incompressible en équilibre**. On fait varier la pression en un point A donné du fluide de $P_i\left(A\right)$ à $P_f\left(A\right)$ par application d'une force. La variation de pression est donc de $\Delta P\left(A\right) = P_f\left(A\right) - P_i\left(A\right)$. Quelle est la variation de pression induite en un autre point M quelconque du fluide ?

- <u>A l'état initial</u> : $P_i\left(M\right) + \rho g z\left(M\right) = P_i\left(A\right) + \rho g z\left(A\right)$
- <u>A l'état initial</u> : $P_f\left(M\right) + \rho g z\left(M\right) = P_f\left(A\right) + \rho g z\left(A\right)$

Par soustraction, on obtient : $\Delta P\left(M\right) = P_f\left(M\right) - P_i\left(M\right) = \Delta P\left(A\right)$.

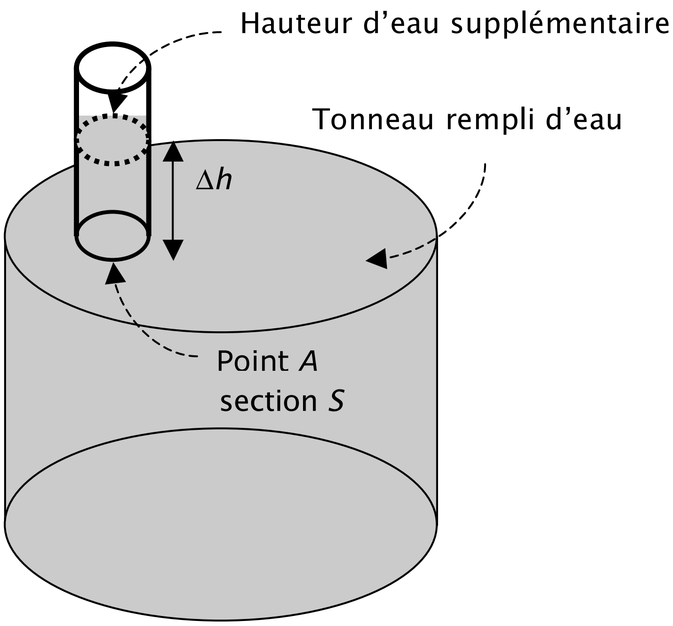
Ce résultat constitue le théorème de Pascal que l'on peut énoncer de la façon suivante :

Blaise Pascal 1623-1662

Toute variation de pression en un point d'un fluide incompressible en équilibre est intégralement transmise en tout point du fluide.

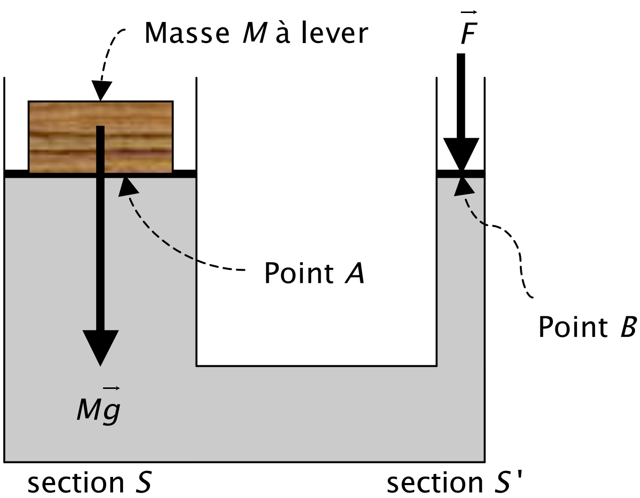
Application et interprétation:

- « Le tonneau de Pascal »



On pratique une petite ouverture de section S en un point A du dessus du tonneau. On rajoute sur cette ouverture une « colonne d'eau » de hauteur h ce qui a pour effet de faire augmenter la pression en A de $\Delta P(A) = \rho g h$. Cette surpression se transmet en tout point du fluide à l'intérieur du tonneau. Cela peut faire éclater le tonneau si h est supérieur à une certaine valeur critique qui, dans la pratique, correspond à un volume $V = hS$ d'eau faible.

- « Presses hydrauliques »



On souhaite soulever la masse M en exerçant une force telle que $F < Mg$. Comment peut-on faire ?

En exerçant la force F sur la section S' au point B, il apparaît en ce point une surpression $\Delta P(B) = \frac{F}{S'}$. D'après le théorème de Pascal, si le fluide est incompressible, cette surpression va se transmettre de façon intégrale au point A donc $\Delta P(A) = \frac{F}{S'}$

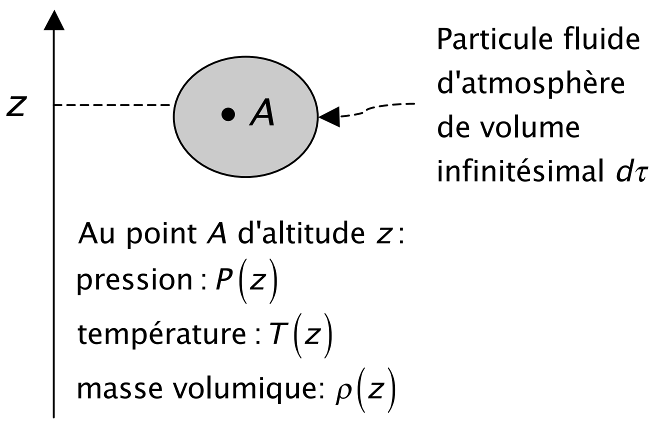
Si $\Delta P(B) = \frac{F}{S'} > \frac{Mg}{S}$, la masse M se soulève ce qui correspond à $F > \frac{S'}{S} Mg$. Ainsi même si $F < Mg$, on peut soulever la masse si $S > S'$. Bien sûr, pour lever la masse d'une hauteur h, il faut faire descendre le piston de section S' d'une hauteur $h' > h$. Le travail moteur $F \times h'$ correspond au travail résistant $Mg \times h$.

Ce principe est utilisé dans tous les engins de travaux publics par exemple.

VI – ETUDE D'UNE ATMOSPHERE ISOTHERME DANS LE MODELE DU GAZ PARFAIT

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer **l'évolution de la pression en fonction de la hauteur** pour un modèle simple d'atmosphère en utilisant le principe fondamental de la statique des fluides.

6-1) Mise en place du modèle



On assimile l'atmosphère à un **gaz parfait**. Nous allons étudier une particule fluide d'atmosphère à une altitude z quelconque comme cela est défini sur le schéma ci-contre. La particule fluide de volume $d\tau$ contient une masse infinitésimale $dm = \rho(z) d\tau$.

Si M est la masse molaire de l'atmosphère alors $P(z) d\tau = \frac{dm}{M} RT(z)$ d'après l'équation des gaz parfaits. On obtient alors :

$$\boxed{P(z) = \frac{\rho(z) RT(z)}{M}}$$

Il s'agit d'une relation pratique qu'il faut savoir retrouver.

Notre objectif à présent est de **déterminer le champ de pression**, c'est-à-dire la fonction $P(z) = f(z)$. Pour cela nous allons supposer que l'atmosphère est :

- ✓ Un gaz parfait (comme on l'a déjà noté).
- ✓ Soumise au seul champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$.
- ✓ Au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

6-2) Calcul du champ de pesanteur

Nous partons de la relation fondamentale de la statique des fluides appliquée à une particule fluide d'atmosphère au repos : $\frac{dP(z)}{dz} = -\rho(z) g$. Il faut intégrer cette relation pour trouver $P(z) = f(z)$.

Pour cela, il faut trouver une relation entre $P(z)$ et $\rho(z)$. On sait que $P(z) = \frac{\rho(z) RT(z)}{M}$ mais cette expression contient encore $P(z) = \frac{\rho(z) RT(z)}{M}$. Nous allons supposer que l'atmosphère est

isotherme, c'est-à-dire que **la température T ne dépend plus de l'altitude, c'est une constante**. Ceci est un modèle simplifié de la réalité. Nous verrons en exercice des modèles plus réalistes.

On obtient alors $\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{Mg}{RT}P(z)$ soit en intégrant (on sépare les variables) $\int_{P_0}^{P} \frac{dP(z)}{P(z)} = -\frac{Mg}{RT}\int_{z_0}^{z} dz \Leftrightarrow \ln P - \ln P_0 = -\frac{Mg}{RT}(z-z_0)$ donc :

$$\boxed{P(z) = P_0 e^{-\frac{Mg}{RT}(z-z_0)}}$$

6-3) Ordres de grandeur

On constate que la pression décroît de façon exponentielle avec l'altitude et avec une distance caractéristique $d = \frac{RT}{mg}$, on peut réécrire $P(z) = P_0 e^{-\frac{(z-z_0)}{d}}$. Si on prend :

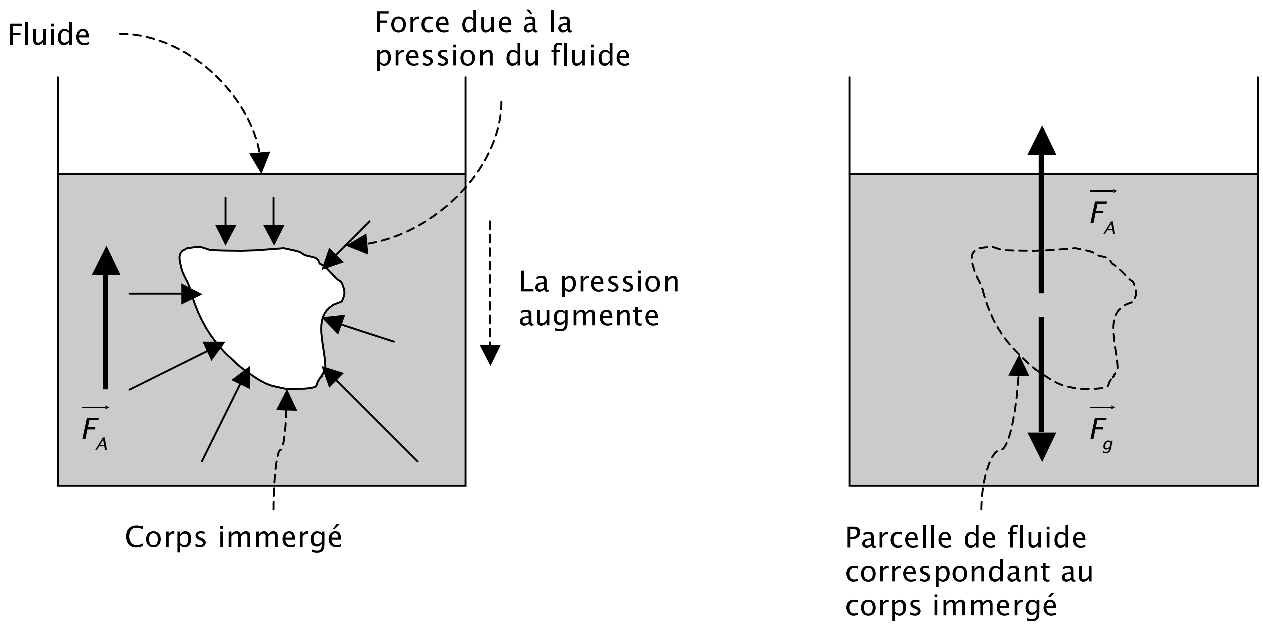
$$\left.\begin{array}{l} M = 29 \text{ g.mol}^{-1} \\ R = 8{,}314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} \\ T = 273 \text{ K} \\ \text{g}=9{,}8 \text{ m.s}^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow d = 8\times10^3 \text{ m.}$$

Si à $z_0 = 0$ $P = P_0 = 1 \text{ bar} = 1\times10^5 \text{ Pa}$, à 100 m on a $P(100 \text{ m}) = 0{,}988 \text{ bar}$. La variation relative de pression est uniquement de 1,2% lors d'un déplacement de 100 m. Pour des variations du mètre, la variation de pression est négligeable. Cela tient du fait que la masse volumique ρ de l'atmosphère est faible, l'atmosphère est un gaz peu dense (et fragile....)

VII – LA POUSSEE D'ARCHIMEDE

7-1) Le théorème d'Archimède

Vous avez tous observé qu'une petite pièce de monnaie jetée dans une fontaine coule alors que d'immenses paquebots flottent à la surface des mers. Ceci s'explique en considérant la poussée d'Archimède.



On considère un corps immergé dans l'eau. Il subit au niveau de sa surface les forces de pression exercées par le fluide qui l'entoure. Comme la pression augmente avec la profondeur, le corps est soumis globalement à une force qui est dirigée vers le haut et qui peut compenser la force de gravité (le poids) dirigée vers le bas. Cette force notée $\overrightarrow{F_A}$ dans ce cours est **la poussée d'Archimède**.

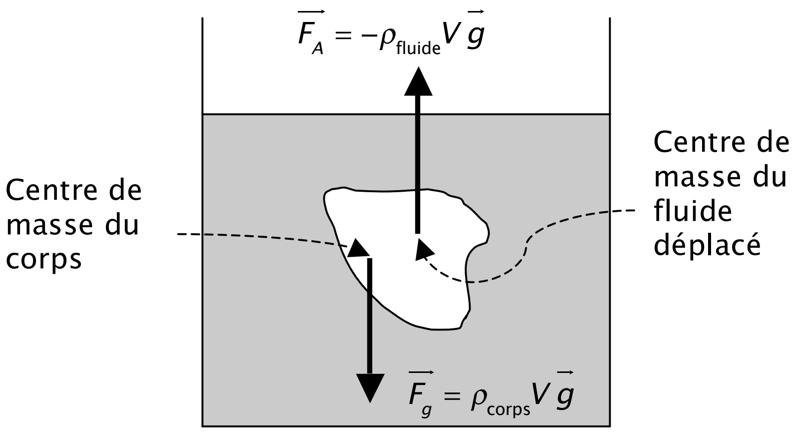
Pour déterminer la norme de $\overrightarrow{F_A}$, il faut noter que les forces de pressions qui s'exercent sur le corps, de volume V, ne dépendent que de sa forme géométrique extérieure et non pas de sa composition interne (répartition de masse, présence de cavités etc...). On isole alors par la pensée la parcelle de fluide qui a la même géométrie que le corps immergé. Cette parcelle étant en équilibre, son poids $\overrightarrow{F_g} = \rho_{\text{fluide}} V \vec{g}$, est compensé par la résultante des forces de pression $\overrightarrow{F_A}$ Ainsi on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{F_A} = -\rho_{\text{fluide}} V \vec{g}}$$

On retiendra le résultat suivant connu comme le théorème d'Archimède :

Les forces pressantes exercées par un fluide quelconque au repos sur un corps immergé en son sein ont une résultante, appelée poussée d'Archimède, opposée au poids du « fluide déplacé ».
La poussée est appliquée au centre de masse du fluide déplacé appelé centre de poussée.

Il faut bien noter qu'en général, le point d'application de la poussée d'Archimède correspond au centre de masse du fluide déplacé qui est différent du centre de masse du corps immergé, où s'applique son poids.



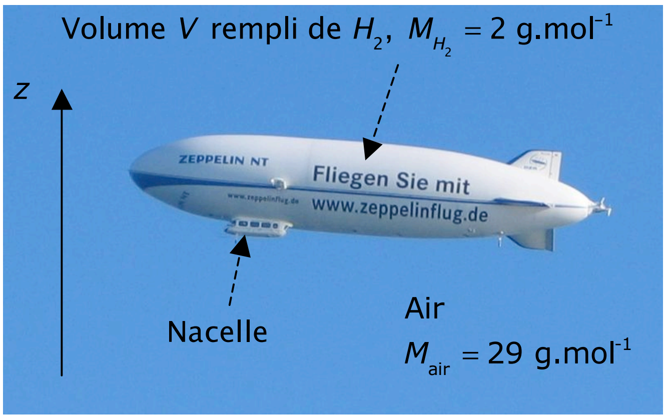
Archimède, 284-212 av J-C, Syracuse

7-2) Flotter ou couler ?

- Si $F_A = \rho_{\text{fluide}} V g > F_g = \rho_{\text{corps}} V g$ soit $\rho_{\text{fluide}} > \rho_{\text{corps}}$ alors le corps flotte à la surface du fluide.
- Si $F_A = \rho_{\text{fluide}} V g < F_g = \rho_{\text{corps}} V g$ soit $\rho_{\text{fluide}} < \rho_{\text{corps}}$ alors le corps coule au fond du fluide.
- Si $F_A = \rho_{\text{fluide}} V g = F_g = \rho_{\text{corps}} V g$ soit $\rho_{\text{fluide}} = \rho_{\text{corps}}$ alors le corps est en équilibre au sein du fluide.

Ainsi la masse volumique moyenne d'un bateau (qui flotte…) est plus faible que celle de l'eau.

7-3) Application : le Zeppelin



Comme $M_{\text{air}} > M_{H_2}$, on peut espérer que la poussée d'Archimède provoque l'ascension du ballon et de la nacelle. Si $m_{\text{nacelle}} = 1000$ kg, quel doit être le volume du ballon pour que l'ensemble puisse décoller ?

Considérons l'ensemble des forces qui agissent sur le ballon et la nacelle :

$\sum \vec{f} = -m_{\text{nacelle}}\, g\overrightarrow{u_z} - m_{H_2}\, g\overrightarrow{u_z} + \underbrace{m_{\text{air déplacé}}\, g\overrightarrow{u_z}}_{\text{poussée d'archimède}}$. Cette force doit être dirigée vers les z positifs pour que le Zeppellin grimpe soit $m_{\text{air déplacé}} > m_{\text{nacelle}} + m_{H_2}$. Nous allons utiliser le modèle du gaz parfait avec $P = 1$ bar et $T = 290$ K. On obtient $\frac{PVM_{\text{air déplacé}}}{RT} > m_{\text{nacelle}} + \frac{PVM_{H_2}}{RT}$ c'est-à-dire :

$$V > \frac{m_{\text{nacelle}} RT}{P\left(M_{\text{air déplacé}} - M_{H_2}\right)}$$

L'application numérique donne $V > 892\ \text{m}^3$. Pour un ballon sphérique, cela correspond à un rayon d'environ 6 m. Cette valeur est assez importante. En effet la poussée d'Archimède exercée par l'air est faible car les gaz ont une masse volumique faible. La poussée d'Archimède exercée par un fluide est beaucoup plus importante.

Dans les montgolfières, on remplace le dihydrogène par de l'air chaud qui est moins dense que l'air froid, il apparaît donc une poussée d'Archimède qui permet l'ascension du ballon.